

Aula no 8

pag. 83

Introduction to
Electrodynamics 3rd ed.

1. Equações de Poisson e Equações de

Laplace

O campo elétrico $\vec{E}$ pode ser

escrito como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (1)$$

onde V é o potencial elétrico.

A pergunta é o que significa as

Eqs.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2)$$

ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ no SI

ϵ_0 é a permissividade no espaço livre, $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3)$$

em termos do potencial elétrico V ?

Substituindo a Eq. (1) na Eq. (2)

ficamos com

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = 4\pi\rho$$

ou

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho \quad (4)$$

No S.I. $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$

onde o operador ∇^2 , o Laplaciano, é

definido em coordenadas cartesianas como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

De forma que a Eq. (4) pode ser
reescrita na forma (em coordenadas cartesianas):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad (6)$$

Conhecida como Eq. de Poisson.

No caso em que $f = 0$, a Eq.

de Poisson se reduz

$$\nabla^2 V = 0$$

(7)

ou (em coordenadas cartesianas)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

(8)

Conhecida como Eq. de Laplace.

Em outras palavras a lei de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi g \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2 V = -4\pi g$$

Por exemplo, no caso de 1 dimensão,

a Eq. de Laplace torna-se

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \quad (3)$$

cuja solução geral é:

$$V(x) = mx + b \quad (10)$$

Para encontrar m e b são necessárias informações adicionais, as chamadas condições de contorno. Essas condições especificam o valor de $V(x)$ em determinadas posições no espaço. Por exemplo

$$V = 4 \quad \text{para} \quad x = 1$$

$$V = 0 \quad \text{para} \quad x = 5$$

Novo caso, pela Eq. (10) obtemos

$$4 = u + b$$

e

$$0 = 5u + b$$

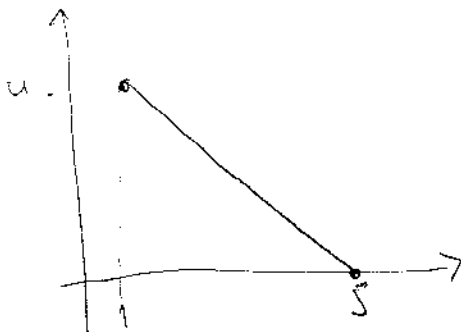
que produz como soluções $u = -1$ e

$b = 5$. Com esses valores $V(x)$ e

dado

$$V = -x + 5$$

(ver fig. 1)



(11)

Voltando à pergunta formulada
na páginas. 1 e 2. Qual a informação dada
pela Eq. (2) em termos do potencial
elétrico V ?

A resposta é

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Ex:

Vamos calcular o campo elétrico $\vec{E}$

produzido por um fio eletrizado com densidade de carga linear λ , utilizando a

Eq. (5)

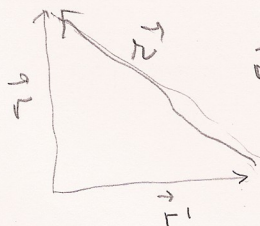
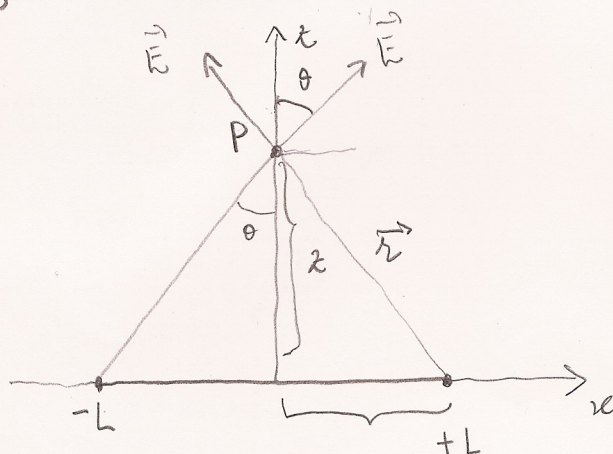
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_P \frac{\lambda(\vec{r}')}{r^2} \hat{r} \, dl' \quad (12)$$

onde $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ (versor em 1 dimensão)

da Eq. (5) (Aula n.º 2, página 6) para o

para o ponto indicado na figura

abaixo



$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

então as componentes na direção z somam

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda dx}{r^2} \right) \cos\theta \hat{z} \quad , \quad (13)$$

devido as componentes na direção x se cancelam. Podemos também escrever

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \quad (14)$$

$$r = \sqrt{z^2 + x^2} \quad (15)$$

onde

$$0 \leq x \leq L$$

Mas no limite $L \rightarrow \infty$

$$E = \frac{2\lambda}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right)^{1/2}} \quad * \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E \Big|_{L \rightarrow \infty} = \frac{2\lambda}{z} \quad * \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

O campo de um fio infinito!

2. Energia Associada a um campo elétrico

A energia potencial elétrica U de um sistema de cargas, que representa o trabalho p/ formação desse sistema de cargas, pode ser obtido

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2 dv \quad \text{SI}$$

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{E}^2 dv \quad \text{CGS} \quad (17)$$

V = volume do espaço onde existe o campo elétrico.

Para resaltar a diferença entre
 energia potencial elétrica $\frac{U}{e}$ e potencial
 elétrico, podemos escrever a Eq. (17)

utilizando $E = -\vec{\nabla}\phi$, logo

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V |\vec{\nabla}\phi|^2 d\tau \quad (18)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 |\vec{\nabla}\phi|^2 d\tau$$

Dessa maneira de se obter

U e'

$$U = \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{j \neq k} \frac{q_k q_j}{r_{jk}} \right) \text{ CGS} \quad (19)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{j \neq k} \frac{q_k^2 q_j^2}{r_{jk}^2} \right) \text{ SI}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \left[\sum_{k \neq j} \frac{q_k}{r_{jk}} \right] \quad (20)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{jk}} \right]$$

Mas o termo entre colchetes é a

contribuição da k -ésima carga p/ potencial
elétrico no ponto onde está a carga

elétrica q_j , então

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \varphi_j \quad (21)$$

Para uma distribuição contínua

de ρ $\rho(x, y, z)$

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi \, dv \quad (22)$$